

```
[ > restart;
```

### Diskriminant polynomu třetího stupně

```
[ > p:=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
                                     p := a x^3 + b x^2 + c x + d
[ > p_1:=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
                                     p_1 := a x^3 + b x^2 + c x + d
[ > p_2:=a*(x-x1)*(x-x2)*(x-x3);
                                     p_2 := a (x - x1) (x - x2) (x - x3)
[ > p_1:=expand(p_1/a);
                                     p_1 := x^3 + \frac{b x^2}{a} + \frac{c x}{a} + \frac{d}{a}
[ > p_2:=collect(p_2/a,x,factor);
                                     p_2 := x^3 + (-x1 - x2 - x3) x^2 + (x1 x2 + x3 x1 + x3 x2) x - x1 x2 x3
```

Viétovy vztahy - vyjádření koeficientů polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů

```
[ > s1:=coeff(p_1,x^2)=coeff(p_2,x^2);
s2:=coeff(p_1,x)=coeff(p_2,x);
s3:=coeff(p_1,x,0)=coeff(p_2,x,0);
                                     s1 := \frac{b}{a} = -x1 - x2 - x3
                                     s2 := \frac{c}{a} = x1 x2 + x3 x1 + x3 x2
                                     s3 := \frac{d}{a} = -x1 x2 x3
```

Výpočet diskriminantu programem:

```
[ > Diskriminant(a,b,c,d):=discrim(p,x);
                                     Diskriminant(a, b, c, d) := -27 a^2 d^2 + 18 a d b c + b^2 c^2 - 4 b^3 d - 4 a c^3
```

Z Viétoových vztahů vyjádříme koeficienty  $b, c, d$

```
[ > Reseni_bcd:=solve([s1,s2,s3],[b,c,d]);
Reseni_bcd := { d = -x1 x2 x3 a, b = -x1 a - x2 a - x3 a, c = x1 x2 a + x3 x1 a + x3 x2 a }
```

a dosadíme do diskriminantu (viz proměnná Diskriminant):

```
[ > Diskriminant2:=eval(Diskriminant(a,b,c,d),Reseni_bcd);
Diskriminant2 := -27 a^4 x1^2 x2^2 x3^2
- 18 a^2 x1 x2 x3 (-x1 a - x2 a - x3 a) (x1 x2 a + x3 x1 a + x3 x2 a)
+ (-x1 a - x2 a - x3 a)^2 (x1 x2 a + x3 x1 a + x3 x2 a)^2 + 4 (-x1 a - x2 a - x3 a)^3 x1 x2 x3 a
- 4 a (x1 x2 a + x3 x1 a + x3 x2 a)^3
```

Po zjednodušení dostaneme diskriminant vyjádřený pomocí kořenů  $x1, x2, x3$  polynomu  $p$ :

```
[ > Diskriminant(x1,x2,x3):=factor(Diskriminant2);
                                     Diskriminant(x1, x2, x3) := a^4 (x2 - x3)^2 (x1 - x3)^2 (x1 - x2)^2
```

Souvislost diskriminantu a Vandermondova determinantu (determinantu Vandermondovy matice)

```
[ > with(LinearAlgebra):
> V:=VandermondeMatrix(<x1,x2,x3>);
V := 
$$\begin{bmatrix} 1 & x1 & x1^2 \\ 1 & x2 & x2^2 \\ 1 & x3 & x3^2 \end{bmatrix}$$

> D3:=Transpose(V).V;
D3 := 
$$\begin{bmatrix} 3 & x1+x2+x3 & x1^2+x2^2+x3^2 \\ x1+x2+x3 & x1^2+x2^2+x3^2 & x1^3+x2^3+x3^3 \\ x1^2+x2^2+x3^2 & x1^3+x2^3+x3^3 & x1^4+x2^4+x3^4 \end{bmatrix}$$

> factor(Determinant(D3));

$$(x2-x3)^2 (x1-x3)^2 (x1-x2)^2$$

```

Diskriminanty polynomů 2., 3. a 4. stupně:

```
[ > discriminant(a*x^2+b*x+c,x);

$$-4ac + b^2$$

> discriminant(a*x^3+b*x^2+c*x+d,x);

$$-27a^2d^2 + 18adb c + b^2c^2 - 4b^3d - 4ac^3$$

> discriminant(a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,x);

$$\begin{aligned} & -6ae d^2 b^2 + 144ae^2 b^2 c - 192a^2 e^2 db + 144a^2 ec d^2 - 4c^3 b^2 e - 80adb c^2 e \\ & + 18db^3 ce - 27a^2 d^4 - 4d^3 b^3 + 18ad^3 bc + d^2 b^2 c^2 - 4ad^2 c^3 - 128a^2 e^2 c^2 + 16ac^4 e \\ & + 256a^3 e^3 - 27b^4 e^2 \end{aligned}$$

>
```